

ΦΡΑΓΜΑΤΑ - inf, sup

1) Έστω $A = \left\{ \frac{2v+1}{v+2}, v \in \mathbb{N} \right\}$

ΝΔΟ το A φραγμένο σωστό

ΜΕΤ

$$\forall v \in \mathbb{N}, \quad \frac{2v+1}{v+2} \leq \frac{2v+v}{v+2} = \frac{3v}{v+2} = 3$$

δηλ. $\forall x \in A$, είναι $x \leq 3$.

Άρα, το 3 α.φ. του A ①

Επίσης, το $\frac{2v+1}{v+2} > 0$ φαίνεται ότι

το 0 κ.φ. του A . ②

Από ①+② $\implies A$ φραγμένο σωστό

2) Έστω $B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{2x-1}{x^2+1} \right\}$

ΝΔΟ το B φραγμένο σωστό.

ΜΕΤ

Για $x \in B$ έχουμε:

$$\left| \frac{2x-1}{x^2+1} \right| = \frac{|2x-1|}{x^2+1} \leq \frac{2|x|-1}{x^2+1} = \frac{2|x|}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} \leq 1 + 1 = 2$$

Άρα το B φραγμένο σωστό

3) Να βρεθούν τα $\sup A$ και $\inf A$ του σωλίου

$$A = (1, 3)$$

ΜΕΤ

$$\Theta\Delta\Omega \quad \sup A = 3$$

Έστω x οτιδήποτε, ώστε $x \in (1, 3) \Rightarrow x < 3 \Rightarrow 3$ α.φ. του A

Έστω ότι $\exists M \in \mathbb{R}$ με $M < 3$ και καμία α.φ. του A
και δίχως κάποια βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι:

$$1 < M < 3. \text{ Επειτα, για τον αριθμό } m = \frac{M+3}{2}$$

$$\text{οτι είναι: } M < \frac{M+M}{2} < \underbrace{\frac{M+3}{2}}_m < \frac{3+3}{2} = 3$$

δηλ. ο $m > M$, $m \in (1, 3)$

Άρα το M οχι α.φ. του A αποσο

οποια και για το $\inf A$.